

Esercizio n.1 bis: Radioterapia

Nel trattamento anti-tumorale con radioterapia è possibile irraggiare la parte malata da diverse posizioni ed angolature e con diversa intensità. Per ognuna di queste possibilità tuttavia bisogna tener conto degli effetti collaterali nocivi che il trattamento provoca sugli organi adiacenti la massa tumorale. Si supponga di conoscere un insieme discreto di possibilità di irraggiamento di un tumore e di voler decidere con quale intensità effettuare l'irraggiamento per ciascuna di esse. Si considerano un dato numero di organi adiacenti da preservare e per ogni possibilità di irraggiamento è noto un coefficiente che esprime la percentuale di radiazione che colpirebbe il tumore e la percentuale di radiazione che colpirebbe ciascuno degli organi adiacenti. Nell'esempio riportato qui le posizioni da cui è possibile irraggiare il tumore sono cinque e gli organi adiacenti il tumore sono sette.

Organi	Posizioni				
	1	2	3	4	5
Tumore	0.4	0.3	0.25	0.7	0.5
Org. 1	0.1	0.0	0.0	0.1	0.2
Org. 2	0.1	0.0	0.15	0.0	0.1
Org. 3	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0
Org. 4	0.0	0.2	0.1	0.1	0.0
Org. 5	0.1	0.0	0.2	0.0	0.1
Org. 6	0.1	0.3	0.15	0.1	0.1
Org. 7	0.2	0.1	0.15	0.0	0.0

Table 1: Coefficienti di assorbimento delle radiazioni [%] per il tumore e per gli organi adiacenti.

L'intensità totale delle radiazioni utilizzabili nel trattamento è limitata a 60 Gray e ci sono soglie massime anche sull'intensità di radiazione per ogni singola possibilità di irraggiamento.

Posizione	Limite max.
1	12
2	13
3	10
4	15
5	15

Table 2: Limiti massimi di radiazione (Gray) erogabile per ogni posizione.

Si vuole massimizzare l'effetto delle radiazioni sul tumore, cioè la quantità totale di radiazioni assorbite dal tumore, nel rispetto di alcune soglie massime di tolleranza per i livelli di radiazione assorbiti da ciascun organo adiacente.

Organo	Limite max.
1	5.5
2	9.0
3	6.0
4	2.4
5	7.0
6	5.5
7	9.5

Table 3: Limiti massimi di radiazione (Gray) ammissibile per ogni organo.

Soluzione.

Si vuole massimizzare un effetto, nel rispetto di alcuni vincoli. L'effetto da massimizzare è la quantità di radiazioni sul tumore ed i vincoli sono dati dalla massima quantità di radiazioni sugli organi circostanti. Sia la funzione obiettivo sia i vincoli si formulano con funzioni lineari. Si tratta inoltre di un problema con variabili limitate, dove cioè è utile considerare soluzioni di base estese, in cui ogni variabile non-basica può essere fuori base per due motivi diversi: o perché ha un valore pari al suo limite inferiore o perché ha un valore pari al suo limite superiore.

Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $O = 7$ organi e $P = 5$ posizioni di irraggiamento. Indichiamo con un indice $i = 0, \dots, O$ ogni organo, dove l'indice $i = 0$ indica il tumore e con un indice $j = 1, \dots, P$ ogni posizione. Indichiamo con m_i la massima intensità di radiazione ammissibile per ogni organo $i = 1, \dots, O$ e con r_j la massima intensità di radiazione erogabile dalla posizione $j = 1, \dots, P$. Indichiamo con a_{ij} la percentuale di radiazione assorbita dall'organo $i = 0, \dots, O$ dalla posizione $j = 1, \dots, P$. Indichiamo con R la massima quantità di radiazione erogabile complessiva.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere la *quantità* di radiazione da erogare da ogni posizione. Definiamo quindi una variabile continua e non-negativa per ogni posizione, per indicare tale quantità. Abbiamo quindi variabili continue non-negative $x_j \forall j = 1, \dots, P$.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che:

- la radiazione complessiva sia non superiore a R : $\sum_{j=1}^P x_j \leq R$;
- la radiazione erogata da ogni posizione $j = 1, \dots, P$ non sia superiore al limite massimo r_j : $x_j \leq r_j \forall j = 1, \dots, P$;
- la radiazione assorbita da ogni organo $i = 1, \dots, O$ non sia superiore al limite massimo m_i : $\sum_{j=1}^P a_{ij} x_j \leq m_i \forall i = 1, \dots, O$.

Funzione obiettivo. Si vuole massimizzare la radiazione che colpisce il tumore: $\max \sum_{j=1}^P a_{0j} x_j$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= \sum_{j=1}^P a_{0j} x_j \\ \text{subject to } \sum_{j=1}^P a_{ij} x_j &\leq m_i && \forall i = 1, \dots, O \\ x_j &\leq r_j && \forall j = 1, \dots, P \\ \sum_{j=1}^P x_j &\leq R \\ x_j &\geq 0 && \forall i = 1, \dots, O \quad \forall j = 1, \dots, P. \end{aligned}$$

Nell'ipotesi di poter eccedere una delle soglie di tolleranza relative agli organi adiacenti, quale soglia di tolleranza converrebbe violare per avere il miglior risultato sul tumore?